Sesión preparatoria Olimpiada Local 2018-19

(Grupo 1. ENUNCIADOS)

Sevilla, 30 de noviembre de 2018

1.- Probar que para todo entero positivo *n*,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

2.- Probar que $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3.- Hacer una conjetura acerca de la fórmula que calcula la suma de los n primeros cubos:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

a continuación probarla por inducción.

4.- En la sucesión de Fibonacci, $a_1=1, a_2=1, a_3=2, \cdots, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, se verifica: $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=a_n\cdot a_{n+1}$

3.- Probar que para todo n, $5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ es divisible por 8

4.- Probar que n^3-n es múltiplo de 6 para todo entero positivo.

5.- Todo número natural $n>1$ es primo o se expresa como un producto de números primos.

6- Probar que $x-y$ es un factor de x^n-y^n

7.- Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ números enteros tales que se pueden expresar como suma de dos cuadrados perfectos. Probar que su producto, $x_1\cdot x_2\cdots x_n$ puede expresarse igualmente como suma de dos cuadrados perfectos. --- (*Olimpiada matemática alemana*, *2013*)

8.- Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n \in (-1,0]$. Probar que para todo *n*,

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\cdots\cdot(1+a_n)\geq 1+a_1+a_2,+\cdots+a_n$$

9.- Demuéstrese que, siendo a > 0, para cualquier número natural n se verifica que $(1+a)^n\geq 1+an$

10.- En un torneo cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores exactamente una vez, y en cada juego hay un ganador y un perdedor.
Decimos que los jugadores $p_1, p_2, \ldots, p_m$ forman un ciclo de longitud *m* si p_1 le gana a p_2, p_2 le gana a $p_3, \ldots, p_{m-1}$ le gana a p_m, y p_m le gana a p_1.
Demostrar que si hay un ciclo $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ($m\geq 3$), entonces hay un ciclo de longitud 3.